数理解析研究所講究録
202巻 1974年 30-39

有限要素法の誤差論

東大 工学部　山本善之

§1. はしがき

"誤差論"は"誤差解析"だけを意味するのではない．有限要素法によって生ずる誤差を知り，その誤差を減じて，必要な精度をたもつための手法を示すのが誤差論の理想である．ここでは，有限要素法の誤差を簡単に述べ，私ども工学者の知りたい点を明確にし，また精度の低下を救うための手法の例について述べたいと思う．なお 本論文では静力学に限定する。

弾塑性体の静力学における誤差は，モデル化誤差など数学的に扱えないものを除くと，

1）離散化誤差，要素に内在するもの

2）丸め誤差，　コンピュータの演算によるもの

があるが，私どもの必要とするのは，平均2乗誤差ではなくて，ある点の応力あるいはひずみの誤差であることを強調し

たい。その誤差の限度は，工学の分野に関係するが，1~10%程度である。

§2. 離散化誤差

離散化誤差については Tong-Pian[1] と Key[2] によって始められ，形状関数による要素内の内挿の精度と，解の精度との関係を示し，要素を細分化していくとき，要素の最大直径 $\bar{h}$ とともに，解は Sobolev norm の意味で収束することが示されている。しかしこれはいわゆる conforming な要素に対してのみなし得る主張であって，実用上屡々用いられる non-conforming な要素に対しては収束は必ずしも期待できない。

Fulton ら[3] に始まる「差分の収束の理論」の有限要素法に対する応用も，有効であることが少くない。この方法は，定量的な議論がより容易であること，non-conforming な要素に対しても直ちに応用できること，工学上望ましい point-wise の収束の議論ができることに注意しよう。

一般に誤差を δu とすると

$$\|\delta u\| = O(\bar{h}^p), \quad \bar{h} = \max h \qquad (1)$$

のような形になることが示される。実際に有限要素法を応用するに当っては，一様な要素分割を行うことは希である。一様でない要素分割が容易であることこそ有限要素法の特徴で

ある。解の精度を高めようとする領域のみ要素を分割することが通常の technique であり，満足すべき結果が得られているが，(1) によると誤差は最大直経で定まることになり，(1) は条件としては緩かに過ぎる。[4]

解の性質が工学的に予見できるとき，たとえばある方向に解がゆるやかに変化するというようなとき，その方向の要素の寸法を大きくするとか，その方向の要素の近似度を落すことができるが，(1) はそれに対して何等の知識も与えてくれない。

工学の要求しているのは，誤差の限界ではなくて，実際の問題に対する知識であり，一般公式ではない。さらにこの知識は精密である必要はないことが少くない。

実用上高次の要素は大きな要素直径に対して使用され，成功している。これは高次の要素に対して (1) の p が大になるということではなく，その係数が小になることを利用したものである。なお高次の要素は低次の要素よりも丸め誤差を発生し易いようである。

なお一方向だけ高精度の要素を用いた例として，はりに対する高塚の研究などがある[5]

§3. 丸め誤差

有限要素法では，一般に

$$Ku = f \qquad K^T = K \tag{2}$$

なる形の代数方程式を解くことに問題が帰着される。この方程式を解くとき，コンピュータの使用bit 数に関連した誤差が発生する。K, f の誤差を δK, δf とすると

$$\frac{\|\delta u\|}{\|u\|} \lessapprox \mathrm{cond}(K)\left\{\frac{\|\delta K\|}{\|K\|} + \frac{\|\delta f\|}{\|f\|}\right\} \tag{3}$$

となる。(3)の右辺第2項をbit 数に関係する量Δで置換し，

$$\frac{\|\delta u\|}{\|u\|} \lessapprox \mathrm{cond}(K)\ \Delta \tag{4}$$

$$\Delta = 2^{-(\text{mantessaのbit数})+1} \tag{5}$$

のような式を用いることができるが，(4) の右辺は大きくなり過ぎることが知られている。

(3), (4) の cond(K) はマトリックス K の条件数で，K の絶対値最大および最小の固有値の比で与えられる。したがって，Kの値だけで丸め誤差が定まることになるが，実際には f が著しく関係する。著者は"有効な条件数"という概念を提案し，これによって誤差の f に対する依存性を明らかにしている。[4,6]

また，いわゆる並列消去法あるいは直列消去法を工学で実

際に用いられるような形で適用するときは，丸め誤差が大きくならないことも知られている。

定ひずみ要素についていえば，

$$
K\text{の最大固有値}=\begin{cases}(1/h)(\text{定数}) & (1\text{次元})\\ (\text{aspect比の関数}) & (2\text{次元})\\ h\cdot(\text{aspect比の関数}) & (3\text{次元})\end{cases} \quad (6)
$$

$$
K\text{の最小固有値}=\left(\begin{array}{l}\text{節点に mass 1 を付加したときの}\\ \text{最小固有振動数の2乗}\end{array}\right) \quad (7)
$$

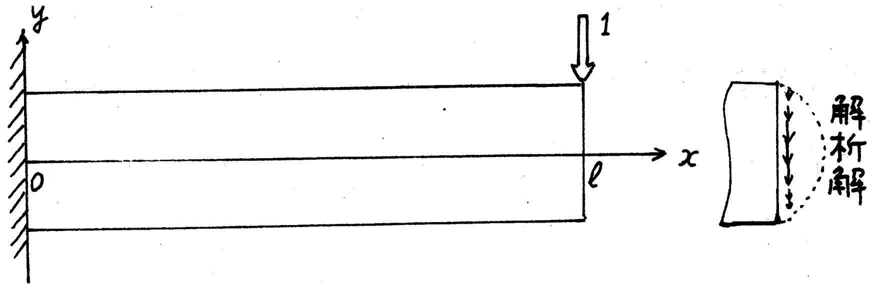
となるので，局所的な要素の細分に対して，1次元のときは条件数は敏感に影響するが，3次元の場合は，あまり影響をうけない。そのため，3次元の問題では，共役傾斜法のように丸め誤差の影響をうけ易い方法でも，有効に応用できることが多い。[4]

§4. 応力・ひずみ

工学的に必要な量は，変位 u ではなくて，その微分に相当する量である。これを精度よく求める手法として，辺平均・節点平均などが，よく用いられる。一般には要素の剛体変位が大になるとき，応力・ひずみの精度は低くなる。[4]

§5 重ね合せ法

工学的によく現われる構造として片持ばりがある。これを



2次要素を用いて解くとよい結果が求まるが，1次要素だと好ましい結果は得られない。このような場合，力による変形あるいは応力を工学的に求め，実際の解は，

(解)=(工学的解)＋(有限要素法の解)　　　(8)

のようにして求めればよい。工学的解は，理想化した力の分布に対応する解であるので，有限要素法の解は，力の分布の仕方の補正を行うことに用いられるわけである。片持ばりが一様断面でないときもこのような考え方を用いることができる。

力が集中力であるときは，この着力点は解の特異点になる。このときは　集中力に対応する特異解を用い

(解)＝(特異解)＋(有限要素法の解)　　　(9)

の形で解けばよい。集中力でなくてもこの方法は応用できる。

幾何学的特異点の存在する問題は特異解の係数が不定であることである。この未知係数も有限要素法の座標関数の一つとして，特異解を形状係数として公式化すればよい。このとき特異解に対応する剛性マトリックスの要素の計算が一般には厄介である。これを行うことなしにこの計算を行う方法を著者らは提案し，有効に応用している。この方法の概要をつぎに述べる。

特異点の近傍には外力は働いていないものと仮定する。特異解をu^{s0}とする。解は

$$u=\phi u^{s0}+u^{r},\quad u^{r}=\phi u^{r0}+u^{e} \qquad (10)$$

のような形で求まるとし，u^{r}は有限要素法によって決定することを考える。

(i) $u^{s0}+u^{r0}$が斉次の微分方程式および境界条件を満たすように，有限要素解u^{r0}を定める。

(ii) 有限要素法による本問題の解をu^{e}とする。

(iii) ϕは次式より定められる。

$$\int \varepsilon(\phi u^{r0}+u^{e})^{T}\, E\, \varepsilon(u^{s0}+u^{r0})\, dV=0 \qquad (11)$$

ここにεは変位からひずみを求めるための作用素，Eは弾性係数を表わす。[7,8]

実は$u^{s0}+u^{r0}$は特異点の近傍のみで有限な値をもち、$\varepsilon(u^{s0}+u^{r0})$のある成分だけ著しく大きい値をとる。それ

ゆえ，(11)の代りに $\varepsilon(u^{s0}+u^{20}) \propto \varepsilon(u^{s0})$ の大きい成分に対応する $E\varepsilon(\phi u^{20}+u^{e})$ の成分を，特異点の近傍で 0 とおいて得られた式を用いればよい。

この方法は鋭い凹みなどがある場合にも適用できる．

Bai[9] は浅海波の問題に，これと類似の考え方を応用して成功している。

§6. おわりに

上述のように，工学においては，数学的にみて無理と思われる方法もあえて実行し，成功していることが少くない。これについては，いつの日か数学的裏付けがなされるものと信ずる．

静力学の問題は，工学的常識は重要な指導原理であり得たが 動力学になるとこれが必ずしも役に立たなくなる。このとき工学的手法が不安になる。とくにこの方向において，数学の理論的援助が望まれる。

文 献

1. P. Tong and T. H. H. Pian, 'The Convergence of Finite Element Method in Solving Linear Elastic Problems.' Int. J. Solids Structures, vol.3 (1967) 865-879.

2. S. W. Key, 'A Convergence Investigation of the Direct Stiffness Method.' Ph. D. Thesis, Univ. of Washington, 1966.

3. J. E. Walz, R. E. Fulton, N. J. Cyrus and R. T. Eppink, 'Accuracy of Finite Element Approximations to Structural Problems.' NASA TN D-5728, 1970.

4. 山本善之、山田善一，マトリックス構造解析の誤差論 培風館 1972.

5. 高塚公郎，棒および柱の弾塑性変形の研究，学位論文 東大 1973.

6. Y. Yamamoto, 'Round-off Errors of the Finite Element Method.' Advances in Computational Methods in Structural Mechanics and Design, University of Alabama in Huntsville Press, 1972, 69-86.

7. Y. Yamamoto, 'Finite Element Approaches with the Aid of Analytical Solutions,' Recent Advances in Matrix Method of Structural Analysis and Design, Univ. of Alabama in Huntsville Press, 1971, 85-103.

8. 徳田直明，山本善之，'クラックの応力拡大係数の有限要素法による高精度計算法.' 造船学会論文集，vol. 132, (1972) 349-360.

9. Kwang June Bai, A Variational Method in Potential Flows with a Free Surface, Report No. NA 72-2, 1972, College of Engineering, University of California, Berkeley.